# ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ ЛАТВИИ

## LATVIJAS EKONOMIKAS EKONOMETRISKĀ MODELĒŠANA

## ECONOMETRIC MODELING OF THE ECONOMY OF LATVIA


**Ивета Миетуле**

Dr.oec., асоц. профессор Резекненской Высшей школы
Э-почта: mietule@inbox.lv, тел. +371 29273350,
Латвия

**Гаяне Гукасян**

доцент кафедры математического моделирования в экономике,
Ереванский Государственный университет
Э-почта: gayaneghukasyan@mail.ru, тел. +371 9120247,
Армения



***Abstract.*** *The article is devoted to the estimation of econometric models of the Latvian economy. The Klein's simplified macroeconomic model of the Latvian economy is discussed. The endogenous variables are consumption, net investment, gross domestic product (excluding net exports and additions to reserves). An exogenous variable is the government spending. The model is just-identified, and Two-stage least squares (2SLS) method provides consistent estimates of the parameters of a structural equation.*
*The modified Keynesian model was also considered, where the lagged variable - gross domestic product of the previos period is presented. It is proved that the model is over-identified, and the Two-stage least squares (2SLS) method provides estimates of the parameters of a structural equation.*
*We have estimated the models with annual time-series data of the Latvia economy for the years 1995 through 2011 (at basic prices in 2000).*



***Keywords:*** *Klein's model, Keynesian model, Two-stage least squares (2SLS) method, Structural Equation Models.*
***JEL code:*** *E01, E20, E27*


### Введение

В экономических исследованиях важное место занимает проблема описания структуры связей между переменными системы одновременных уравнений (7., 10., 11., 13.). В еще большей степени возрастает потребность в использовании системы взаимосвязанных уравнений в макроэкономических исследованиях (9.,12.). Это связано с тем, что макроэкономические показатели, являясь обобщающими показателями состояния экономики, чаще всего взаимозависимы.

В 1950 г. лауреатом Нобелевской премии профессором Пенсильванского университета Л. Клейном была опубликована макроэкономическая модель для развития экономики США за 1921-

1941 гг. Все экономические связи в ней представлены в линейной форме. Модель состоит из трех структурных уравнений и трех тождеств. Уравнения включают функцию потребления, функцию инвестиций, функцию заработной платы в частном секторе; тождества включают стандартное равенство национального дохода (плюс косвенные налоги) сумме потребления, инвестиций и государственных расходов, равенство национального дохода сумме заработной платы в частном и государственном секторе плюс прибыль и, наконец, равенство прироста капитала инвестициям. Затем, в 1955 г. была опубликована макроэкономическая модель Клейна-Гольдбергера для экономики США периода 1929-1952 гг. (кроме военных лет). Модель состоит из 20 уравнений, 15 из которых отражают экономическое поведение и носят стохастический характер, а 5 — тождества. Модель оказала большое влияние на всю последующую практику разработки и применения больших макроэкономических моделей в США и в других странах Запада.

Цель статьи- идентификация двухшаговым методом наименьших квадратов упрощенной модели Клейна и модифицированной модели Кейнса для экономики Латвии. Для этого сначала дана общая характеристика экономики Латвии.

Период исследования - 1995 – 2011 гг.

## 1. Общая характеристика экономики Латвии

Стремление обеспечить высокие темпы развития и включиться в европейскую экономику при ограниченных собственных ресурсах заставляло Латвию развиваться в долг. Это привело к тяжелым последствиям, к исчезновению в национальной экономике многих производств и к сильнейшему экономическому спаду страны.

В 2000-2007 гг. Латвия была одной из самых быстро развивающихся государств, успешно проводивших социально-экономические реформы. По данным Евростата, валовой внутренний продукт (ВВП) на душу населения, рассчитанный по паритету покупательной способности, увеличился за эти годы почти в 2 раза, с 7,0 до 13,9 тыс. евро. Большое значение для экономики Латвии в начале XXI в. имел приток иностранных инвестиций. К началу 2006 г. накопленный объем прямых иностранных инвестиций составил 33,1% от ВВП, а на начало 2008 г. - 37,5% (7,5 млрд долл.). Кризис в Латвии, развивавшийся на фоне разразившегося осенью 2008 г. мирового финансового кризиса, демонстрировал в 2010 г. глубокое падение экономики. К концу 2008 г. задолженность страны составляла 44 млрд долл. (в 8,5 раза больше, чем золото и валютные запасы страны). Инфляция достигла в 2008 г. 15,3% и была самой высокой в Европейском Союзе(ЕС) (таблица 1).

Национальный кризис в рамках развития мирового финансового кризиса усилился, и к январю 2009 г. экономические, социальные и политические процессы в латвийском обществе стали неуправляемыми. В I квартале 2010 г. по сравнению с I кварталом 2009 г. спад ВВП составил 18% (таблица 1). После получения в декабре 2008 г. спасительного кредита в размере 7,5 млрд евро от Международного Валютного фонда (МВФ) в план государственного бюджета на 2009 г. было заложено падение ВВП на 14%. Реальный ВВП по сравнению с 2008 г. сократился на 18% (в 2008 г. падение составило 4,6%), объем инвестиций - на 37,7%.

Несмотря на национальный кризис, иностранные инвесторы не покинули Латвию, увеличили вложения в основной капитал зарегистрированных в Латвии предприятий на 780 млн латов (на 32,12%). Общий объем внешней торговли в 2010 г. уменьшился на 31,4% по сравнению с 2009 г. Экспорт сократился на 19,4%, что обусловлено главным образом сильным экономическим спадом в соседних странах - главных торговых партнеров Латвии. Импорт уменьшился на 34,2%, что связано с сильным падением (25,4%) спроса как у населения, так и в производственном секторе.

*Таблица 1.*

Некоторые макроэкономические показатели
Латвии в 2000 -2010 гг. (14.)

| | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Прирост реального ВВП (% к предыду-щему году) | 6.9 | 8.0 | 6.5 | 7.2 | 8.7 | 10.6 | 12.2 | 10.0 | -4.6 | -18.0 | -3.5 |
| Среднегодовой уровень инфляции (%) | 2.6 | 2.5 | 2.0 | 2.9 | 6.2 | 6.9 | 6.6 | 10.1 | 15.3 | 3.3 | -2.5 |
| Бюджетный дефицит/про-фицит (% от ВВП) | -2.8 | -2.1 | -2.3 | -1.6 | -1.0 | -0.4 | -0.5 | -0.3 | -4.1 | -6.8 | -8.6 |

Предпринятые латвийским правительством в 2009 г. меры экономии (сокращение государственных расходов в размере примерно 10% от ВВП) вместе с международной помощью, полученной от ЕС в размере 2,2 млрд евро и МВФ в размере 590 млн евро, позволили удержать дефицит бюджета на уровне 6,8% от ВВП. Государственный долг за год вырос на 2,17 млрд евро и достиг почти 32% от ВВП, что в 1,6 раза больше, чем в 2008 г. Правительство и Банк Латвии не стали девальвировать лат. Среднегодовой уровень инфляции за 12 месяцев 2009 г. составил 3,3% (в 2008 г. - 15,3%). Быстрыми темпами росла безработица. Ее уровень к концу 2010 г. достиг 17%, за год число официально зарегистрированных безработных увеличилось на 30% .

В феврале 2010 г. был подписан дополненный меморандум о взаимопонимании Латвии и ЕС. В марте 2010 г. Латвия получила третью часть пакета финансовой помощи Еврокомиссии в размере 500 млн евро. После тяжелого экономического кризиса наконец в Латвии наблюдались признаки улучшения ситуации. В I кв. 2010 г. ВВП впервые с конца 2007 г. вырос по сравнению с IV кв. 2009 г. на 0,3%.

## 2. Упрощенная макроэкономическая модель Клейна для экономики Латвии

В работе рассматривается задача идентификации двухшаговым методом наименьших квадратов упрощенной модели Клейна (6., 10., 12.) для экономики Латвии:

$$\begin{cases} C_t = c_0 + c_1 Y_t + \varepsilon_t \\ I_t = i_0 + i_1 Y_t + \delta_t \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases} \qquad (1)$$

где $C_t$ - обьем потребления, $I_t$ - инвестиции, $Y_t$ - валовой внутренний продукт (без чистого экспорта и прироста запасов), $G_t$ - государственные расходы, $t$ - номер наблюдения $(t = 1, 2, \ldots, n)$, $c_1$ – склонность к потреблению, $i_1$ – склонность к инвестированию, $c_0, i_0$ - свободные члены. В модели $C_t, I_t, Y_t$ - эндогенные переменные, $G_t$ - экзогенная переменная, а $\varepsilon_t$ и $\delta_t$ - случайные составляющие, имеющие математическое ожидание равное нулю, постоянную дисперсию и отсутствие взаимосвязи между собой. Предполагается, что экзогенная переменная $G_t$ некоррелирует с ошибкой.

Используя балансовое тождество системы (1), запишем структурную модель в следующей форме:

$$\begin{cases} C_t = c_0^1 + c_1^1 I_t + c_1^1 G_t + \varepsilon_t^1 \\ I_t = i_0^1 + i_1^1 C_t + i_1^1 G_t + \delta_t^1 \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$c_0^1 = \frac{c_0}{1-c_1},\ c_1^1 = \frac{c_1}{1-c_1},\ \varepsilon_t^1 = \frac{\varepsilon_t}{1-c_1}, \quad (3)$$

$$i_0^1 = \frac{i_0}{1-i_1},\ i_1^1 = \frac{i_1}{1-i_1},\ \delta_t^1 = \frac{\delta_t}{1-i_1} \quad (4)$$

Для оценивания параметров модели (1) с помощью несложных преобразований, преобразуем модель от структурной формы к приведенной форме:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_{10} + \alpha_{11} G_t + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \alpha_{20} + \alpha_{21} G_t + \varepsilon_{2t} \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\alpha_{10} = \frac{c_0^1 + c_1^1 i_0^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{11} = \frac{c_1^1 + c_1^1 i_1^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \varepsilon_{1t} = \frac{\varepsilon_t^1 + c_1^1 \delta_t^1}{1 - c_1^1 i_1^1}, \quad (6)$$

$$\alpha_{20} = \frac{i_0^1 + i_1^1 c_0^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{21} = \frac{i_1^1 + i_1^1 c_1^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \varepsilon_{2t} = \frac{\delta_t^1 + i_1^1 \varepsilon_t^1}{1 - c_1^1 i_1^1} \quad (7)$$

Учитывая некорреллированность $G_t$ со случайными составляющими $\varepsilon_t$ и $\delta_t$, можно доказать наличие ненулевой корреляции между эндогенными переменными и ошибками в соответствующих уравнениях. Действительно, из (5) имеем

$$C_t = \frac{c_0(1-i_1) + c_1 i_0}{(1-c_1)(1-i_1) - c_1 i_1} + \frac{c_1}{(1-c_1)(1-i_1) - c_1 i_1} G_t + \frac{(1-i_1)\varepsilon_t + c_1 \delta_t}{(1-c_1)(1-i_1) - c_1 i_1}$$

Так как $\operatorname{cov}(G_t, \varepsilon_t) = 0,\ \operatorname{cov}(G_t, \delta_t) = 0$, то

$$\operatorname{cov}(C_t, \varepsilon_t) = \frac{(1-i_1)\operatorname{var}(\varepsilon_t) + c_1 \operatorname{cov}(\delta_t, \varepsilon_t)}{(1-c_1)(1-i_1) - c_1 i_1},$$

что, в общем случае, не равно нулю.

Как известно, непосредственное применение метода наименьших квадратов в структурной форме модели приводит к смещенным и несостоятельным оценкам структурных коэффициентов. Действительно, оценив первое уравнение системы (1) методом наименьших квадратов, получаем:

$$\hat{c}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(C_t - \bar{C}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2} = c_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(c_0 + c_1\bar{Y} + \varepsilon_t - \bar{C}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2},$$

где $\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n}$, $\bar{C} = \frac{\sum_{t=1}^{n} C_t}{n}$. В общем случае $E(\hat{c}_1) \neq c_1$.

В таких ситуациях, как известно, целесообразно воспользоваться инструментальными переменными. Наиболее распространенным методом выбора инструментальных переменных является двухшаговый метод наименьших квадратов (*Two Stage Least Squares, 2SLS*) (7., 11., 12., 13.).

В приведенной форме (5) эндогенные переменные $C_t, I_t$ выражены только через экзогенную переменную $G_t$ и случайные составляющие $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$, а это значит, что коэффициенты приведенной формы модели могут быть состоятельно оценены методом наименьших квадратов, и могут быть использованы для оценивания структурных параметров.

Прежде чем приступить к оцениванию параметров, сначала рассмотрен вопрос идентификации модели (1) (11., 12., 13.). Проверим необходимое и достаточное условие идентифицируемости для первого уравнения системы (1). Чтобы уравнение было идентифицируемо, необходимо, чтобы число исключенных из уравнения предопределенных переменных было не меньше числа включенных эндогенных переменных минус единица. Модель включает три эндогенные переменные ($C_t, I_t, Y_t$) и одну предопределенную переменную. Следовательно, $K = 3$, $M = 1$. Первое уравнение включает две эндогенные переменные ($k_1 = 2$), и в нем отсутствуют экзогенные переменные $(m_1 = 0)$. Таким образом, $M - m_1 = k_1 - 1$, т.е. выполнено порядковое условие $M - m_1 \geq k_1 - 1$ идентифицируемости уравнения, что является необходимым условием идентифицируемости уравнения.

Проверим для первого уравнения достаточное условие идентификации. В соответствии с достаточным условием идентификации определитель матрицы коэффициентов при переменных, не входящих в исследуемое уравнение, не должен быть равен нулю, а ранг матрицы должен быть равен числу эндогенных переменных модели минус единица, т.е. 3- 1 = 2 в нашем случае.

Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $Det\,A = -1 \neq 0$, следовательно $rank(A) = 2$, т.е. рассматриваемое уравнение точно идентифицируемо.

Аналогично можно доказать, что и второе уравнение системы (1) точно идентифицируемо.

Приступим к оцениванию параметров модели (1). В работе для оценивания модели использовались ежегодные статистические данные для экономики Латвии 1995 – 2011 гг. в постоянных ценах 2000 г. (млн. лат) (14.).

Рассмотрим таблицу коэффициентов корреляции переменных $C, I, Y$ и $G$:

| | C | G | I | Y |
|---|---|---|---|---|
| C | 1.000000 | 0.895397 | 0.923731 | 0.986997 |
| G | 0.895397 | 1.000000 | 0.936322 | 0.934921 |
| I | 0.923731 | 0.936322 | 1.000000 | 0.972972 |
| Y | 0.986997 | 0.934921 | 0.972972 | 1.000000 |

Из таблицы видны высокие значения коэффициентов корреляции макроэкономических показателей.

Так как система (1) точно идентифицируема, то для идентификации можно использовать как косвенный, так и двухшаговый метод наименьших квадратов. Сначала рассмотрим косвенный метод наименьших квадратов (7.,12.). Для реализации этого метода применив к каждому уравнению системы (5) метод наименьших квадратов, определяются несмещенные оценки параметров $\hat{\alpha}_{10}, \hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{20}, \hat{\alpha}_{21}$. По этим оценкам, из уравнений (6), (7), (3), (4) находятся значения $c_0, c_1, i_0, i_1$.

Для применения двухшагового метода наименьших квадратов сначала определяются несмещенные МНК-оценки параметров $\hat{\alpha}_{10}, \hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{20}, \hat{\alpha}_{21}$ приведенной формы, применив к каждому уравнению системы (5) метод наименьших квадратов.

Используя инструменты пакета EViews, оценивая парную регрессию инвестиций по государственным доходам, получаем (в скобках указаны оценки стандартных ошибок):

$$I_t = \underset{(774.711)}{-6344.273} + \underset{(0.727)}{7.509}G_t, \qquad R^2 = 0.877, S.E. = 290.995 \tag{8}$$

Dependent Variable: I
Method: Least Squares
Date: 02/19/13 Time: 09:41
Sample: 1995 2011
Included observations: 17

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -6344.273 | 774.7114 | -8.189208 | 0.0000 |
| G | 7.509 | 0.727106 | 10.32734 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.876699 | Mean dependent var | 1623.164 |
| Adjusted R-squared | 0.868479 | S.D. dependent var | 802.3957 |
| S.E. of regression | 290.9950 | Akaike info criterion | 14.29462 |
| Sum squared resid | 1270172. | Schwarz criterion | 14.39265 |
| Log likelihood | -119.5043 | F-statistic | 106.6539 |
| Durbin-Watson stat | 1.217685 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |

t-статистики коэффициентов соответсвенно равны -8.189 и 10.327, что свидетельствует о наличии достоверной статистической связи между обьясняющей и зависимой переменными.

Применим критерий Дарбина-Уотсона для проверки отсутствия автокорреляции остатков. Имеем $DW = 1.218$. Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_l, d_u$ при уровне значимости $\alpha = 0.01$ для числа наблюдений $n = 17$ и числа независимых переменных $m = 1$ равны $d_l = 0.87, d_u = 1.10$ (13). Так как $d_u < DW < 4 - d_u$, то нулевая гипотеза об отсутствии корреляции остатков не отвергается.

Аналогично, оценивая парную регрессию потребления по государственным доходам, получаем:

$$\begin{gathered} C_t = -7881.546 + 11.118 G_t, \quad R^2 = 0.802, S.E. = 571.312 \\ (1520.996) \quad (1.428) \end{gathered} \tag{9}$$

t-статистики коэффициентов соответсвенно равны -5.182 и 7.788. DW=1.033.

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Date: 02/19/13 Time: 09:30
Sample: 1995 2011
Included observations: 17

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -7881.546 | 1520.996 | -5.181834 | 0.0001 |
| G | 11.11792 | 1.427531 | 7.788221 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.801735 | Mean dependent var | 3915.045 |
| Adjusted R-squared | 0.788518 | S.D. dependent var | 1242.328 |
| S.E. of regression | 571.3123 | Akaike info criterion | 15.64388 |
| Sum squared resid | 4895966. | Schwarz criterion | 15.74191 |
| Log likelihood | -130.9730 | F-statistic | 60.65639 |
| Durbin-Watson stat | 1.032742 | Prob(F-statistic) | 0.000001 |

На втором шаге двухшагового метода наименьших квадратов вычисляются прогнозные значения $\hat{C}_t, \hat{I}_t$ и осуществляется регрессия (2) с заменой в правой части $C_t, I_t$ соответственно на $\hat{C}_t, \hat{I}_t$, т.е. строятся МНК-оценки структурных параметров системы

$$\begin{cases} C_t = c_0^1 + c_1^1(\hat{I}_t + G_t) + \varepsilon_t^1 \\ I_t = i_0^1 + i_1^1(\hat{C}_t + G_t) + \delta_t^1 \end{cases} \tag{10}$$

Получаем

$$\begin{cases} C_t = \underset{(483.515)}{307.263} + \underset{(0.172)}{1.343}(\hat{I}_t + G_t) \\ \\ I_t = \underset{(381.845)}{-1363.54} + \underset{(0.075)}{0.601}(\hat{C}_t + G_t) \end{cases}$$

Из (3), (4) вычисляются склонность к потреблению $c_1 = 0.573$ и склонность к инвестированию $i_1 = 0.375$.

Приведем окончательные результаты оценивания на основе ежегодних данных для экономики Латвии с 1995 до 2011 гг. с помощью двухшагового метода наименьших квадратов

$$\begin{cases} C_t = 131.141 + 0.573 Y_t \\ I_t = 851.68 + 0.375 Y_t \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что так как для рассматриваемой системы выполнено ранговое условие идентификации и порядковое условие со знаком равенства (точная идентификация), то 2SLS-оценка совпадает с оценкой косвенного метода наименьших квадратов.

## 3. Модифицированная модель Кейнса

Рассмотрим модифицированную модель Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ I_t = i_0 + i_1 Y_t + \delta_t \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases} \tag{12}$$

где в системе (1) добавлена лаговая переменная эндогенной переменной $Y_{t-1}$ - валовой внутренний продукт (без чистого экспорта и прироста запасов) предыдущего периода. В модели $C_t, I_t, Y_t$- эндогенные переменные, $G_t$, $Y_{t-1}$ - предопределенные переменные, а $\varepsilon_t$ и $\delta_t$ - случайные составляющие, имеющие математическое ожидание равное нулю, постоянную дисперсию и отсутствие взаимосвязи между собой. Предполагается, что предопределенные переменные $G_t$, $Y_{t-1}$ некоррелированы с ошибкой.

Используя тождество, входящее в систему (12), запишем структурную форму системы в следующем виде:

$$\begin{cases} C_t = c_0^1 + c_1^1 I_t + c_1^1 G_t + c_2^1 Y_{t-1} + \varepsilon_t^1 \\ I_t = i_0^1 + i_1^1 C_t + i_1^1 G_t + \delta_t^1 \end{cases} \qquad (13)$$

где

$$c_0^1 = \frac{c_0}{1-c_1},\ c_1^1 = \frac{c_1}{1-c_1},\ c_2^1 = \frac{c_2}{1-c_1}, \varepsilon_t^1 = \frac{\varepsilon_t}{1-c_1}\ , \qquad (14)$$

$$i_0^1 = \frac{i_0}{1-i_1},\ i_1^1 = \frac{i_1}{1-i_1},\ \delta_t^1 = \frac{\delta_t}{1-i_1} \qquad (14)$$

Рассмотрим вопрос идентификации модели. Первое уравнение точно идентифицируемо.

Докажем, что второе уравнение сверхидентифицируемо. Для второго уравнения системы (12) необходимое условие идентифицируемости выполняется в виде строгого неравенства $M - m_1 > k_1 - 1$. Проверим достаточное условие идентифицируемости. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих во второе уравнение, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & c_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$rank(A) = 2$, так как определитель квадратной подматрицы $2 \times 2$ этой матрицы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Следовательно, второе уравнение сверхидентифицируемо.

Для оценивания параметров модели (12) получаем следующую приведенную форму:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_{10} + \alpha_{11} G_t + \alpha_{12} Y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \alpha_{20} + \alpha_{21} G_t + \alpha_{22} Y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ Y_t = \alpha_{30} + \alpha_{31} G_t + \alpha_{32} Y_{t-1} + \varepsilon_{3t} \end{cases} \qquad (16)$$

где

$$\alpha_{10} = \frac{c_0^1 + c_1^1 i_0^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{11} = \frac{c_1^1 + c_1^1 i_1^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{12} = \frac{c_2^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \varepsilon_{1t} = \frac{\varepsilon_t^1 + c_1^1 \delta_t^1}{1 - c_1^1 i_1^1}, \quad (17)$$

$$\alpha_{20} = \frac{i_0^1 + i_1^1 c_0^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{21} = \frac{i_1^1 + i_1^1 c_1^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \alpha_{22} = \frac{c_2^1 i_1^1}{1 - c_1^1 i_1^1},\ \varepsilon_{2t} = \frac{\delta_t^1 + i_1^1 \varepsilon_t^1}{1 - c_1^1 i_1^1} \quad (18)$$

Оценивая парную регрессию потребления по государственным доходам и валовому внутреннему продукту предыдущего периода, получаем:

$$C_t = -1898.998 + 3.135 G_t + 0.393 Y_{t-1}, \qquad R^2_{adj} = 0.862, S.E. = 449.534 \quad (19)$$

(136.852) (0.531) (0.044)

t-статистики коэффициентов соответсвенно равны -0.88, 1.17 и 3.182.

Оценивание парной регрессии инвестиций по государственным доходам и валовому внутреннему продукту предыдущего периода дает:

$$I_t = -6519.961 + 7.903 G_t - 0.034 Y_{t-1}, \qquad R^2_{adj} = 0.856, S.E. = 292.36 \quad (20)$$

(1404.122) (1.738) (0.08)

t-статистики коэффициентов соответсвенно равны -4.643, 4.547 и -0.424.

Оценивание парной регрессии валового внутреннего продукта по государственным доходам и валовому внутреннему продукту предыдущего периода дает:

$$Y_t = -8418.96 + 12.037 G_t + 0.359 Y_{t-1}, \qquad R^2_{adj} = 0.879, S.E. = 704.797 \quad (21)$$

(3384.92) (4.19) (0.192)

t-статистики коэффициентов соответсвенно равны -2.487, 2.873 и -1.85.

На основе уравнений модели (19)-(21) найдем структурные коэффициенты. Так как первое уравнение точно идентифицируемо, то применим косвенный метод наименьшого квадрата. Выразим из уравнения (21) переменную $G_t$ и подставим найденное выражение в уравнение (19). Получим первое структурное уравнение: $C_t = 293.695 + 0.26 Y_t - 0.487 Y_{t-1}$.

Так как второе уравнение сверхидентифицируемо, то применим двухшаговый МНК. Найдем на основе (21) прогнозные значения $\hat{Y}_t$ и используем их для оценивания параметров второго структурного уравнения системы (12). Получаем:

$$I_t = -785.595 + 0.366Y_t$$

Итак, окончательно, оценивая модифицированную модель Кейнса на основе ежегодних данных для экономики Латвии с 1995 до 2011 гг., получаем

$$\begin{cases} C_t = 293.695 + 0.26Y_t - 0.487Y_{t-1} \\ I_t = -785.595 + 0.366Y_t \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

## Выводы и предложения

1. В статье рассматривается задача идентификации упрощенной модели Клейна и модифицированной модели Кейнса для национальной экономики Латвии на основе ежегодних данных с 1995 до 2011 гг.
2. Доказана, что упрощенная модель Клейна точно идентифицируема. Следовательно, для оценки структурных коэффициентов модели можно применять как косвенный, так и двухшаговый методы наименьших квадратов, результаты которых совпадают.
3. Модифицированная модель Кейнса сверхидентифицируема, так как первое уравнение точно идентифицируемо, а второе - сверхидентифицируемо. Структурные коэффициенты точно идентифицируемого уравнения оценены с помощью косвенного метода наименьших квадратов, а сверхидентифицируемого – с помощью двухшагового метода наименьших квадратов.

## Использованная литература и источники


1. АЙВАЗЯН С.А., МХИТАРЯН С.В. *Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов*. Москва (М.).: Юнити, 1998.
2. АРЖЕНОВСКИЙ С.В., ФЕДОСОВА О.Н. *Эконометрика*: Учебное пособие / Рост. гос. экон. универ. Ростов на Дону, 2002. 102 с.
3. АФАНАСЬЕВ В.Н., ЮЗБАШЕВ М.М. *Анализ временных рядов и прогнозирование*. М.: Финансы и статистика, 2001.
4. БОКС Дж., ДЖЕНКИНС Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*. М.: «Мир», 1974. Вып. I. 248 с.
5. КЕНДЕЛ М. *Временные ряды*. М.: Финансы и статистика, 1981. 199 с.
6. МАЛЕНБО Э. *Статистические методы эконометрии*. М.: Статистика, 1976.
7. МАГНУС Я.Р., КАТЫШЕВ Р.К.,ПЕРЕСЕЦКИЙ А.А. *Эконометрика*. Начальный курс. М.: Дело, 2004. 576 с.
8. МЭНКЬЮ Н.Г. *Принципы экономикс*. 2-е изд, Санкт-Петербург: Питер, 2002. 496 с.
9. ПУЧКОВ В. Ф. *Математические модели макроэкономики*. Учебное пособие.3-е издание. Изд. ГИЭФПТ, 2010, 199 с.
10. ТИНТЕР Г. *Введение в эконометрию*. М.: Статистика, 1965.

11. ФИШЕР Ф. *Проблемы идентификации в эконометрии*. М.: Статистика, 1978.
12. DOUGHERTY C. *Introduction to econometrics*. New York, Oxford, Oxford University Press. 1992.
13. DUNCAN O. D. *Introduction to Structural Equation Models*. New York: Academic Press. 1975.
14. *Iekšzemes kopprodukts* [tiešsaiste] Pieejas veids: http://www.csb.gov.lv/statistikas-temas/iekszemes-kopprodukts-galvenie-raditaji-30248.html

## Summary

In the economic research, a prominent place is taken by the issue of describing the structure of the relationship between variables in the system of simultaneous equations. The need to use a system of interrelated equations in the macroeconomic research is even more increasing. This is due to the fact that the macroeconomic indicators, as general indicators of the state of the economy, most often are interdependent.

In 1950, there was published a macroeconomic model for the development of the economy of the United States of America by Nobel Laureate Professor L. Klein of the University of Pennsylvania for the years 1921-1941. The model consists of three structural equations and three identities. The equations include the function of consumption, the function of investments, the function of pay in the private sector; the identities include the standard equality of the national income (plus the indirect taxes) to the amount of consumption, investment and government spending, the equality of the national income with the amount of pay in the private and public sectors, plus profit and, finally, the equality of the capital growth with the investments. Then, in 1955, there was published the macroeconomic model of Klein – Goldberg for the economy of the USA in the period between 1929 and 1952 (except for the war years). The model consists of 20 equations, 15 of which reflect the economic behaviour, they are stochastic in nature, but 5 - identities. The model has had a great impact on all the subsequent practice of design and application of large macroeconomic models in the USA and other Western countries. The article deals with the task of identification of a simplified Klein's model and a modified Keynesian model for the national economy of Latvia based on the annual data from 1995 to 2011. It is proven that the simplified Klein's model is accurately identifiable. Consequently, in order to estimate the structural coefficients of the model, there can be applied both the indirect and two-stage least squares method, the results of which coincide. The modified Keynesian model is overidentified because the first equation is accurately identifiable but the second one – overidentified. The structural coefficients of the accurately identifiable equation are estimated using the indirect least squares method but those of the overidentified ones - using the two - stage least squares method.