SOCIETY. INTEGRATION. EDUCATION
Proceedings of the International Scientific Conference. Volume III, May 22th -23th, 2020. 516-530

MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA KĀ ZINĀTNISKĀ IZZIŅA VIDUSSKOLĀ

Modelling of Mathematical Processes as a Scientific Cognition in High School

Austra Reihenova
Daugavpils University, Latvia

Abstract. *The topicality of the article relates to the use of modelling in a real, complicated and complex process, with the need to forecast the progress and results of the occurrence. Article problem: In school, the focus is on building theoretical models, without real-life context. In real life, the problems are interdisciplinary, more difficult to define than in the theoretical model. The student should be able to transfer knowledge and concepts from one learning discipline in which he can deal with the problem to another. Mathematical modelling offers opportunities to connect and use knowledge from different disciplines. The aim of the article is to stimulate interest in the use of diverse learning approaches and forms, on the learning of mathematics as science, on its application in other scientific disciplines to address problems, on mathematics as a form of systemic thinking and on mathematical modelling as a learning method. The study used student test papers and open-ended questionnaires to collect data. The research used data triangulation method for data processing.*
Keywords: *knowledge transfer, learning approaches, mathematical modelling, scientific inquiry, systems theory.*

Ievads
Introduction

Mācīšanās ir mērķtiecīgs izziņas process, tā ir pieredzes bagātināšana un aktīva darbība, kuras mērķis ir pārveidot katram pašam sevi, attīstīt prasmi mācīties un domāt, jo būs jāpilnveidojas mūžilgi. Informācijas tehnoloģiju laikmetā lielāks uzsvars tiek likts uz radošu mācīšanās procesu, uz pētījumiem un problēmu risinājumu, kur matemātika tiek saprasta kā domāšanas instruments.

Lielākoties matemātikas mācīšanās procesā balstās uz teorētisku modeļu veidošanu bez reālās dzīves konteksta (Chengnm, 2001). Skolēnam ir jāprot pārnest zināšanas un koncepcijas no vienas mācību disciplīnas, kurā viņš problēmu prot risināt, uz citām. Matemātiskā modelēšana (MM) piedāvā iespējas savienot un izmantot zināšanas no dažādām disciplīnām.

http://dx.doi.org/10.17770/sie2020vol3.5016

Raksta aktualitāte saistās ar matemātiskās modelēšanas izmantošanu reālā kompleksā procesā, ar nepieciešamību prognozēt parādību norisi un rezultātus.

Raksta mērķis parādīt matemātikas lietojumu problēmu risināšanā citās zinātņu disciplīnās, parādīt matemātiku kā sistēmiskās domāšanas formu un matemātisko modelēšanu kā mācīšanās metodi.

Zinātniskā izziņa ir sistēmiska, tā balstās uz skolēna spēju kompleksi lietot zināšanas, tās pārnest jaunā situācijā. Analizējot Valsts izglītības satura centra centralizēto eksāmenu darbu rezultātus matemātikā 12.klasē, dati rāda, ka eksāmenu rezultāti samazinājās no 34,6% 2018.gadā līdz 32,7% 2019.gadā, bet 9.klasē par 3% no 2017.gada uz 2019.gadu (Valsts izglītības un satura centrs, 2017, 2018, 2019). Arī OECD PISA rezultāti atspoguļo, ka Latvijas skolēnu skaits ar augstu matemātikas kompetences līmeni samazinājies no 8% 2012.gadā līdz 5,2% 2015.gadā (Geske, Grīnfelds, Kangro, & Kiseļova, 2013, 2016). OECD PISA 2012 matemātikas rezultātu analīzē atzīmēts, ka problēmrisināšanas kompetence pazeminās, ja par maz tiek risināti teksta uzdevumi ar zināšanu pārnesi jaunās situācijās (Geske et al., 2013). Ikviena paņēmiena apguves galvenais rādītājs ir prasme izmantot to jaunā situācijā (Palamarčuka, 1984). Skolēni MM uzdevumus risina nepietiekamā līmenī. Mencis norāda, ka teksta uzdevumu risināšanai sākumskolā jāizmanto vairāk nekā puse no visa laika, kas veltīts matemātikas apgūšanai, kā arī, sākumskolā skolēnam, katra veida teksta uzdevumus, jāprot risināt bez īpašas apdomas (Mencis, 2014).

Vidējās izglītības matemātikas saturā sasniedzamo rezultātu nosaka izvirzītais mērķis. Viens no šiem mērķiem saistās ar matemātisko modelēšanu, kuru skolēnam jāapgūst, lietojot matemātiskos modeļus praktiskos, reālos kontekstos, vai matemātikas un citu jomu kontekstos, vai padziļinot izpratni par matemātiskiem modeļiem un to lietojumu, atkarībā no sasniedzamā līmeņa (Skola 2030, 2017).

Pētījumā izvirzītie jautājumi:

1) Kādas mācīšanās metodes matemātiskā produktīvi izmantot, lai vidusskolēni iegūtu kvalitatīvas matemātikas zināšanas un attīstītu matemātiskās domāšanas prasmes, kuras viņi varētu izmantot reālās dzīves problēmu risināšanā?
2) Kādu prasmju apguves līmeni vidusskolēni uzrāda MM problēmuzdevumu risināšanā?

Matemātiskās modelēšanas veidošanas teorētiskie aspekti
Theoretical aspects of mathematical modeling

Zinātniskā izziņa. Skolēns pasauli izzina ar dažādiem paņēmieniem - empīrisko, emocionālo, racionālo izziņu un modelēšanu (Bonka et al., 2010).

Zinātniskās izziņas augstākā vērtība ir objektīvā patiesība, kas virzīta uz parādības būtības atklāšanu, tā ir mērķtiecīga un problēmiski ievirzīta darbība.

Zinātniskā izziņa īstenojas divos līmeņos – empīriskā un teorētiskā, kuri atšķiras pēc izziņas mērķiem, līdzekļiem un metodēm. Empīriskās izziņas mērķis ir faktu informācijas iegūšana par noteiktas realitātes parādībām. Teorētiskās izziņas mērķis ir faktu informācijas vispārināšana un izpratne. Faktu izskaidrošanai nepieciešams noteikts teorētiskais pamats, taču šis pamats var balstīties tikai uz noteiktiem empīriskās izziņas rezultātiem. Zinātniskā izziņa ir process, kura rezultātā ar teorijas pilnveidošanos var mainīties atsevišķu faktu interpretācija, bet empīriskās informācijas padziļināta izpratne precizē teorijas saturu (Vedins, 2008). Zinātniskā izziņa pēc savas dabas ir sistēmiska, tās rezultātus veido loģiski sakārtota zināšanu sistēma, kura stingri izskaidro noteiktas realitātes parādības (Broks, 1988; Vedins, 2008).

Pierādījums matemātikā. Matemātika ir vienīgā racionālā zinātne, kas pasauli iepazīst caur sakarībām un attieksmēm (Bonka et al., 2010). Matemātikā pierādījums ir loģiski stingru secinājumu virkne, kas ved no dotajiem apgalvojumiem uz pierādāmo, neatkarīgi no tā, kāds ir šo apgalvojumu saturs un ietekme uz mūsu dzīvi (Čerāns, 2009). Matemātikā pierādījums ietvert sevī dažādu gadījumu pilnu pārlasi. Matemātikā jāprot argumentēt, ka izteiktais apgalvojums ir pilnīgi patiess visos gadījumos, pretējā gadījumā šis apgalvojums netiek uzskatīts par pierādītu. Fizikā par pierādījumu tiek uzskatīts izvirzītas hipotēzes eksperimentāls apstiprinājums, tādējādi hipotēze, var neapstiprināties visās situācijās, kuras iepriekš netika paredzētas (Čerāns, 2009).

Sistēmiskā pieeja. Modeļus plaši izmanto dažādās zinātnēs. Modeļu izmantošana skolēnu mācīšanās procesā pastiprina prakses teorētisko līmeni, jo, veidojot modeļus, var pētīt gan visu objektu, gan tā raksturīgās īpašības. Izdala trīs modeļu pielietošanas iespējas:

1) modelis kā problēmas analīze, kuru izmanto risinājumu meklēšanai;
2) pazīstams modelis kā īpašs problēmu risināšanas vispārīgs veids;
3) sākotnējs parauga modelis kā jaunas problēmas risinājums citā kontekstā. Prognozēt kādas noteiktas situācijas vai parādības gaitu palīdz MM (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Freudenthal, 1978; Moriyama et al., 2007).

MM bāzi veido trīs saistītas disciplīnas:

1) konkrētā disciplīna, kurai atbilst aplūkojamais objekts (sistēma);
2) matemātika, kura nodrošina simbolisku konkrētas sistēmas apraksta valodu, matemātiskos lielumus un matemātiskās struktūras;
3) informācijas tehnoloģijas (IT), kuras palielina matemātisko modeļu analīzes tehniskās iespējas. Visas trīs disciplīnas atrodas ciešā sasaistē un mijiedarbībā, tās pašas arī veido noteiktu sistēmu (Broks, 1988; Garyayev, 2006; Greefrath, 2016; Moriyama et al., 2007).

Vidusskolēnus jāorientē uz zinātnisku un praktisku uzdevumu sistēmisku risināšanu. Sistēmiskā pieeja balstās uz praksi, kurā aplūko objektu un procesu daudzveidību; objektu mijiedarbību un kopsakarus; objektu kustību un mainību. Sistēmu teorija ir sistēmu starpdisciplināra izpēte, lai atklātu modeļus un principus, ko var attiecināt uz visu veidu un līmeņu sistēmām, visās zinātņu nozarēs (Mārtinsone, Pipere, & Kamerāde, 2016).

Matemātiskais modelis un matemātiskā modelēšana. Viens no praksē nozīmīgiem matemātikas metožu lietojumu virzieniem ir saistīts ar matemātisko modeļu izveidošanu un izmantošanu. Bieži vien matemātika tiek uzskatīta par darbību, kas ir atdalīta no reālās dzīves un tiek lietota tikai skolā, bet matemātika ir sistēmiska domāšanas forma, kas rada risinājumus reālām problēmām, izmantojot matemātisko modelēšanu (Niss, 1989).

Jēdzieniem modelis un modelēšana ir atšķirīga nozīme, jo modelis saistās ar gala produktu, kas tiek iegūts modelēšanas rezultātā, bet modelēšana attiecas uz procesu. Modeļi ikdienas dzīvē tiek izveidoti tā, ka tie ir reāli vai saistīti ar realitāti. MM ir kognitīva metode, kurā reāls objekts vai situācija, tiek aizstāts ar modeli. Modelis ir domāšanas procesa rezultāts un izpētot izveidoto modeli, iegūstam informāciju par sākotnējo objektu vai procesu.

Skolēns var izzināt pasauli, izmantojot teoriju un praksi. Teoriju izmanto, lai uz tās bāzes veidotu matemātisko modeli. Teorijas nav modeļi, jo teorijas nemodelē vienu konkrētu sistēmu, tās ģenerē modeļus. Katra modeļa pielietojamības apgabals ir ierobežots, tādējādi nav radīts viens vienots modelis visai darbības videi vai kādai lielākai tās daļai. Modelis ir jebkas, ko izmanto (vai var izmantot) kaut kā cita vietā, kaut kādam nolūkam (Podnieks, 2014).

Matemātikā un fiziskās zinātnēs aplūko teorētiskos (abstraktos) un praktiskos (lietišķos) modeļus. Dabas likumi precīzi atspoguļojas modeļos, kas radīti uz dabas likumu pamata. Matemātika nepētī objektus, sistēmas un procesus tādus, kādi tie ir sastopami dabā. Matemātika pēta apskatāmo sistēmu un procesu vienkāršotus, stingrus un precīzi aprakstītus modeļus (Podnieks, 2014). Matemātika ir instrumentu kopa, kas visu laiku rada jaunus instrumentus: modeļus un teorijas (Zeps, 2009). Matemātika to dara, formulējot definīcijas, veidojot algoritmus un pierādot teorēmas. Simboliskā modelēšana ir teorētiska, bet materiālā ir eksperimentāla (Broks, 1988).

Modeļus, atkarībā no pētījuma mērķiem, var klasificēt pēc parametriem: pēc to izmantošanas izziņas procesā (zinātnisks vai izglītojošs); pēc vizualizācijas veida- simbolisks (aprakstošs, matemātisks, grafisks); pēc formalizācijas veida - fizisks (bioloģisks, ķīmisks, ekonomisks), matemātisks, datorizēts; pēc struktūras sarežģītības pakāpes; pēc funkcionālām sakarībām (nepārtraukts vai diskrēts), utt. (Broks, 1988; Freudenthal, 1978; Garyayev, 2006). Pētījumā modeļi tiek aplūkoti pēc to formalizācijas veida.

Matemātisko modeļu pazīmes: matemātiskais modelis ir autonoms, kuru pēta izolēti, neatkarīgi no parauga; stabils, bet, to modificējot, tiek radīts cits modelis; pašpietiekams, kas izskaidro procesus tīras secināšanas ceļā; formalizēts, kas atklāj matemātikas kā zinātnes īpašu dabu, kuras daba ir citām zinātnēm "perpendikulāra" (Podnieks, 2014).

Pētījumā matemātiskā modeļa veidošanā tiek izmantotas gan matemātikas, gan fizikas satura zināšanas. Lai no modeļa iegūtu informāciju, tiek izmantoti secināšanas līdzekļi, tās pašas teorijas, kas ir modeļa pamatā, taču var veidoties situācijas, ka būtu jāizgudro jauni līdzekļi, metodes vai pat jaunas teorijas. Ja modeļa struktūrā kādi jautājumi iepriekš nav paredzēti, tad tie būtu speciāli jāpieprogrammē klāt, ievērojot, lai modeļa struktūra modifikācijas rezultātā nemainās (Podnieks, 2014).

Matemātikai un dabaszinātnēm kopīgais ir dažādu procesu izprašana un to izmaiņu raksturojums. Matemātika ir zinātne par reālās pasaules kvantitatīvām attiecībām, telpiskām formām un loģiskām konstrukcijām. Matemātika apraksta abstraktos modeļus, tā palīdz izprast pasauli ap mums. Dekarts atzīmēja, ka matemātika ir zinātne vispār, jo visas zinātnes uz to attiecas kā daļas pret veselo (Dekarts, 1978). Matemātiskie pētījumi, kas radušies pašas matemātikas ietvaros, pēc ilgāka laika atrod pielietojumu reālu problēmu risināšanai, to dziļākas izpētes rezultātā (Zeps, 2009).

Matemātikas pielietojumi virza matemātikas attīstību. No praktiskā viedokļa matemātika ir zinātne par modeļiem un sakārtojumu tajos. Matemātikas izpētes objekti ir skaitļi, iespējas, formas, algoritmi un izmaiņas, savukārt kā zinātne par abstraktiem objektiem matemātika balstās uz loģiku nevis uz novērojumiem, tomēr, lai atklātu patiesību, kā līdzekļus tā izmanto novērojumus, simulācijas un eksperimentus. Matemātikai, kā universāli pielietojamai zinātnei (Garyayev, 2006), ir īpaša loma izglītībā. Ar teorēmu palīdzību matemātika piedāvā zinātnei gan patiesību pamatus, gan standartu noteiktību. Matemātikā izmantotās galvenās pētniecības metodes ir analīze un sintēze, indukcija un dedukcija.

Savukārt fiziku māca kā dabaszinātni, jo tā balstās uz novērojumiem un eksperimentiem. Katrai no zinātnēm ir sava struktūra un sistematizācija. Fizikas uzdevumu tekstos jau ir integrēts reālās dzīves konteksts, bet atšķirība ir abu zinātņu jēdzienu skaidrojumos. Matemātikai ir svarīga nozīme fizikas procesu izpratnē, jo fizika balstās uz matemātisko modeļu veidošanu. Fizika un matemātika ir zinātnes ar atšķirīgiem mērķiem un atšķirīgu pieeju problēmu risināšanā (Garyayev, 2006). Abu zinātņu sadarbība saistīta ar matemātikas fundamentālo nozīmi fizikā. Apgūstot abas zinātnes starpdisciplināri, tiek parādīta konkrētā teorētiskā fakta nozīmība, ne tikai vienas zinātnes ietvaros, bet teorijas praktiskais pielietojums un nozīmība dzīvē un dabā (Bonka et al., 2010).

Matemātiskā modeļa izveides posmi:

(1) kvalitatīva modeļa izveide, kurā tiek saskatīta reāla problēma un pareizi noformulēts uzdevums;
(2) matemātiskā modeļa izveide, kurā reālās dzīves problēmu pārvērš par matemātikas problēmu;
(3) matemātikas modeļa izskaitļošana un kvalitatīva izpēte, kurā atrisina matemātikas uzdevumu;
(4) rezultātu iegūšana un to interpretācija, kurā matemātikas rezultātu interpretē par saprotamu reālai dzīvei un pārbauda tā patiesumu (Garyayev, 2006; Geske et al., 2013), tiek lietots arī cits posmu sadalījums (Broks, 1988; Moriyama, 2007). (Pētījumā tiks aplūkoti četri posmi.)

Matemātiskais modelis neskaidro iegūto rezultātu, neveic interpretējošu funkciju. Lai izprastu iegūto rezultātu, jāizmanto fiziskais modelis, bet fiziskajam modelim nepiemīt tāda universāluma pakāpe, kāda piemīt matemātiskajam modelim. Dabaszinātnes meklē atbildi uz jautājumu: kāda ir pasaule, tad matemātika izvirza sev mērķi zināt, kāda tā var būt visās iespēju bezgalībās (Garyayev, 2006). Jebkura matemātiskā modeļa izstrāde ir dabas, sabiedrības vai domāšanas objekta vai procesa interpretācija matemātikas valodā (Bonka et al., 2010). MM ir viena no matemātiskās izglītības pētījumu jomām, kurai tiek pievērsta īpaša uzmanība, tās mērķis ir izpētīt iespējas un īpatnības.

Modelēšanas uzdevumu risināšana nodrošina produktīvu mācīšanos neviendabīgās grupās, kur nepieciešamas dziļas iepriekšējās zināšanas; ieinteresētība un spriestspēja; attīstīta kritiskā domāšana; individualizēta un teorētiski orientēta mācīšanās; kur pieejamas plašas pētnieciskas laboratorijas (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Greefrath & Vorhölter, 2016; Niss, 2002).

MM kompetence. MM pamatā ir rūpīga visas informācijas pārbaude, tiek nodefinēta problēma un, balstoties uz doto informāciju, tiek izveidots matemātisks (abstrakts) vai loģisks modelis, kas patiesi apraksta konkrēto situāciju. MM saistās ar matemātiskā modeļa izveidi, ar modeļa iekšējās struktūras izpēti un ar tālāku matemātiskā modeļa interpretāciju. MM ir matemātikas mācīšanās process, kura laikā skolēns pārnes matemātikas zināšanas uz reālās dzīves procesu skaidrojumu, pielietojot matemātikas zināšanas, prasmes un iemaņas, kā arī modelēšanas prasmes veikt mērķtiecīgu modelēšanas procesu, lai īstenotu matemātiskās prasmes darbībā. Šai pārnesei ir nepieciešama modelēšanas kompetence.

MM kompetence ietver četrus savstarpēji saistītus komponentus: teorētisko, kur svarīga ir teorētisko zināšanu nozīme, jo dažādu vecuma grupu skolēnus māca atšķirīgos līmeņos; ar procesu saistītu, kur svarīga ir matemātiskās modelēšanas posmu izpratne; ar mācīšanos saistītu, kurš ietver divas galvenās kompetences: mācīšanās plānošanu un mācīšanās īstenošanu; ar rezultātu izvērtēšanu saistītu, kurā uzsver teorētisko zināšanu pietiekamību, lai mācīšanās būtu produktīva un orientēta uz rezultātiem (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Niss, 2002).

MM kompetences veidošanas pamatskolas posmā prioritāti piešķir dabas procesu fiziskai izpratnei, savukārt vidusskolas posmā ekvivalenti tiek mācīta fiziskā un matemātiskā modelēšana, jo šajā posmā izglītības problēmas risināšanā ir jāpalielina secinājumu precizitāte un universālums. Datormodelēšana kļūst nozīmīga, kad skolēns jau ir izveidojis savu priekšstatu par fizisko procesu būtību un izveidojis savu zinātnisko vērtību sistēmu (Garyayev, 2006; Greefrath & Vorhölter, 2016; Moriyama et al., 2007).

Skolēniem ir jāapgūst prasme pārtulkot modeļa realitāti uz matemātikas valodu. Modeļa lietderību var novērtēt tikai ar problēmas atrisināšanu un interpretēšanu. Modeļa analīze dod iespēju veikt zinātniskus secinājumus par jaunveidotās sistēmas īpašībām un veikt praktiskus secinājumus par jaunveidotās sistēmas reaģēt spēju konkrētos ārējās vides apstākļos.

Problēma kā MM sākumpunkts. Matemātiskā modeļa veidošana un matemātiskās modelēšanas pielietošana ir divas atšķirīgas darbības. Matemātiskā modeļa veidošana sākas ar reālu problēmu un pakāpeniski virzās uz iespējami dažādiem risinājumiem. Reālu matemātisku modeļu veidošanā problēmas var rasties ar problēmu risinājumu no fiziskām disciplīnām, kas prasīs izmantot fizisko disciplīnu zināšanas. Jebkurš mācību priekšmets jāmāca un jāapgūst sistēmiski, atsedzot šī priekšmeta kā konkrētas sistēmas uzbūves hierarhiju un līdztekus parādot šī priekšmeta kā sistēmveidojoša elementa vietu citu priekšmetu vidū. Sistēmisms ir modernā apmācības procesa fundaments (Broks, 1988).

Matemātiskās domāšanas prasmes ir būtiskas, lai skolēni varētu interpretēt situācijas un radīt risinājumus problēmu situācijām. Domāšanas operācijas, kuras izmanto domāšanas procesā, ir objektu klasificēšana, salīdzināšana, secināšana, vispārināšana, analīze un sintēze. Matemātiskās domāšanas procesa attīstību veicina gan vienkārši, gan sarežģīti, gan nestandarta reāli uzdevumi. Kritiskā domāšana ir aktuāla visos modeļa posmos.

Metakognīcija ir domāšana par domāšanu, tā attiecas uz izpratni un prasmi kontrolēt savus domāšanas procesus, tā ir būtiska, veicot objektu atlasi un problēmu risināšanas pieeju meklēšanu, jo modelī ir jāiekļauj aplūkotās parādības galvenie fakti, kas saistīti ar sistēmu. Tā ietver paša skolēna domāšanas procesa uzraudzību un mācīšanās pašregulāciju (Reihenova, 2018a; Reihenova, 2018b). Matemātikas pielietojumam problēmu risināšanā un MM vajadzētu būt neatņemamai mācību programmas sastāvdaļai, jo tās būs noderīgas dzīvē (Chengnm, 2001).

Pētījuma rezultāti
Research results

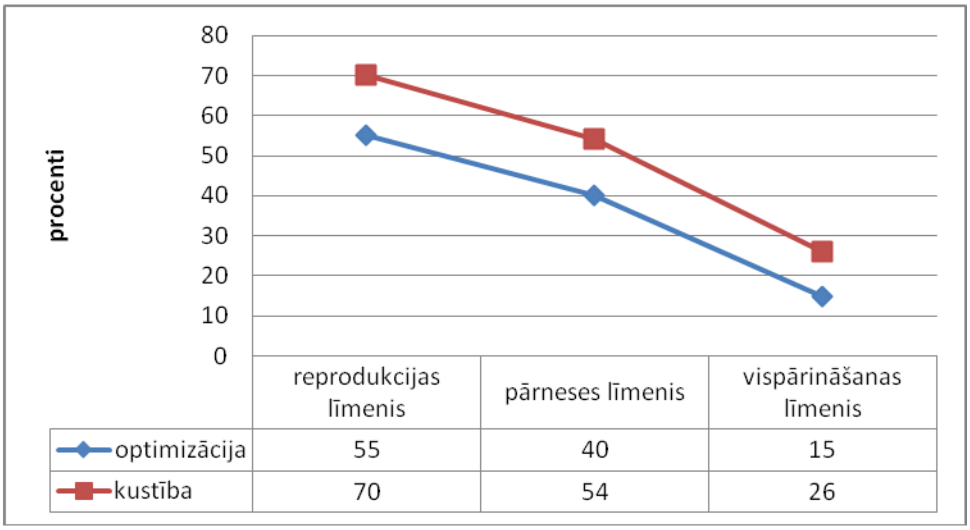
Pilotpētījums tika veikts ar mērķi noskaidrot, kā skolēni lieto MM kā mācīšanās metodi problēmuzdevumu risināšanā. Pētījums veikts 2019.gada decembrī, kurā piedalījās kādas vidusskolas eksperimentālās klases (EK) 29 skolēni un kontrolklašu (KK) 85 skolēni. Iegūto empīrisko datu analīzei un interpretācijai tika izmantotas gan kvalitatīvās, gan kvantitatīvās metodes (Mārtinsone et al., 2016). Kvantitatīvo datu analīze ļauj identificēt un interpretēt dažādus aspektus par pētāmo problēmu, bet tendenču atklāšanai izmantoti EK (n=29) kvantitatīvie rādītāji, savukārt iegūtie rādītāji tika pārbaudīti KK (n=85). Datu ieguvei izmantoti skolēnu MM darbi un datu sīkākai analīzei veikta aptauja ar atvērtiem jautājumiem, kurās KK skolēni (n=85) izvērtēja savu MM mācīšanās pieredzi matemātikas mācību stundu laikā. Pētījuma validitāti veido datu analīzes metožu un novērošanas iekšējā triangulācija.

Vienkāršos matemātiskos modeļus skolēni sāk veidot sākumskolā un pamatskolā, risinot teksta uzdevumus ar reālās dzīves saturu (Mencis, 2014). Modeļu veidošana balstās uz algebrisku vienādojumu, nevienādību, sistēmu un analītisku izteiksmju veidošanu (Mencis, 2014; Podnieks, 2014). Mācīšanās procesā modelēšanas uzdevumi paredzēti matemātikas pielietojumam, tie ir vienkāršoti skolēnu izpratnei. Pētījumā EK un KK skolēnu izpratne, par optimizācijas procesa un kustību uzdevumu apguves līmeņiem, ir atspoguļota attēlos.

MM uzdevumu izpratne tika analizēta, izmantojot komplekso prasmju struktūru, kas sastāv no savstarpēji saistītiem komponentiem, kritērijiem un līmeņiem (pietiekams, optimāls un augsts):

(1) prasmes reproducēt (aktualizēt, atlasīt un lietot);
(2) prasmes pārnest;
(3) prasmes vispārināt (konkretizēt, klasificēt un abstrahēt) (Reihenova, 2019a).

Skolēnu snieguma līmenis ir augsts tajās konstrukta kategorijās, kurās skolēni veic darbības pēc noteikta algoritma, pielietojot reproduktīvās zināšanas, skatīt 1. attēlu. Palielinoties SOLO kognitīvajam līmenim, skolēnu prasmju apguves līmenis samazinās, kad skolēniem ir jāparāda zināšanu pārnese uz jaunu, vēl nezināmu situāciju. Visaugstāko kognitīvo līmeni, kur jāizmanto prasme vispārināt, sasniedza tikai 15% EK skolēnu, skatīt 1. attēlu.

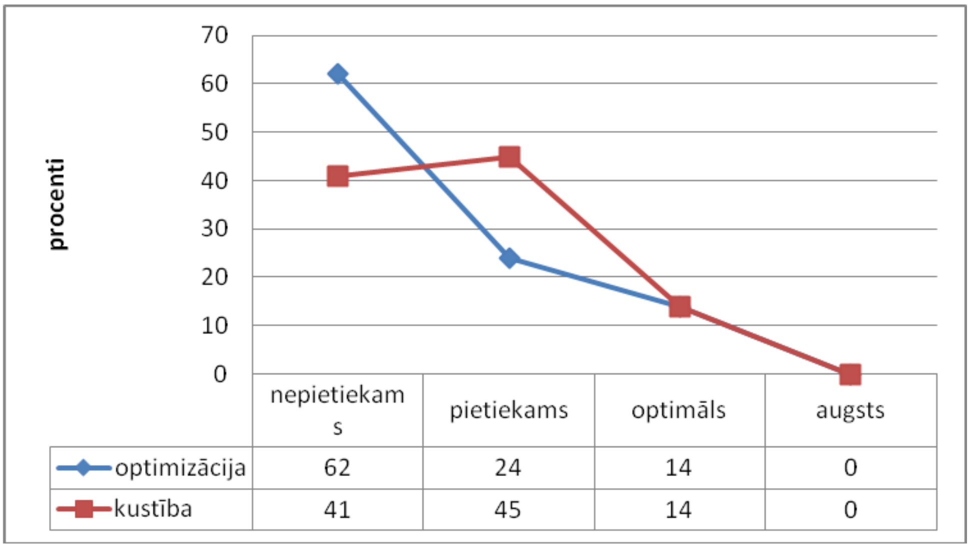


1. attēls. ***Konstruktu kognitīvais līmenis EK (n=29)***
Figure 1 **Cognitive level of constructs EC (n=29)**

Prasmi, izveidot procesa aprakstam atbilstošu matemātisko modeli un to atrisināt reprodukcijas līmenī, ir apguvuši 55% EK skolēnu, bet pārneses līmenī-tikai 40% skolēnu, savukārt vispārināšanas līmeņa apguves prasmes ir nepietiekamas. Skolēni nepietiekamu uzmanību velta MM formalizācijas un interpretācijas posma izpildei. Prasmi, uzrakstīt zinātniskās atziņas par optimizācijas procesa iegūto rezultātu izvērtējumu, ir attīstījuši tikai 16% EK skolēnu. Vispārināšanas līmeņa uzdevumiem bija jāizveido matemātiski abstakts modelis un tā patiesums jāpierāda. Šī konstrukta apguves līmenis EK ir tikai 15%, skatīt 1.attēlu.

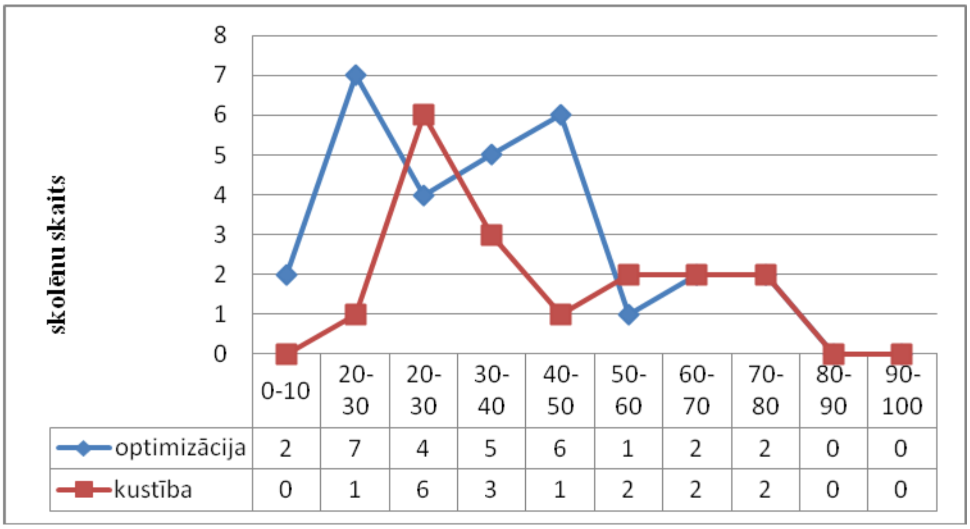
Matemātiskie modeļi, kuri balstās uz kustību problēmuzdevumu risināšanu, par divu objektu sastapšanās un panākšanas procesu izpratni, jau apgūti pamatskolā, tādējādi reprodukcijas līmeņa uzdevumu apguves līmenis ir 70% EK, kas ir par 15% augstāks nekā optimizācijas problēmuzdevumu izpratnē EK. Pārneses līmenis arī ir augstāks par 14% EK, bet vispārināšanas līmenis par 11% EK. To varētu izskaidrot ar atpazīstamu matemātisko modeļu lietošanu un mērķtiecīgi veiktu atkārtošanas procesu, kā arī ar tēmas satura paralēlu apguvi fizikā un ar mācīšanās metožu daudzveidību, skatīt 1.attēlu.

No 2. attēla redzams, ka tikai 38% EK skolēnu apguvuši prasmi risināt optimizācijas MM uzdevumus pietiekamā un optimālā līmenī, bet kustību uzdevumus-59% EK skolēnu.



2. attēls. ***EK skolēnu prasmju apguves līmenis (n=29)***
Figure 2 ***EC students' skills mastering level (n=29)***

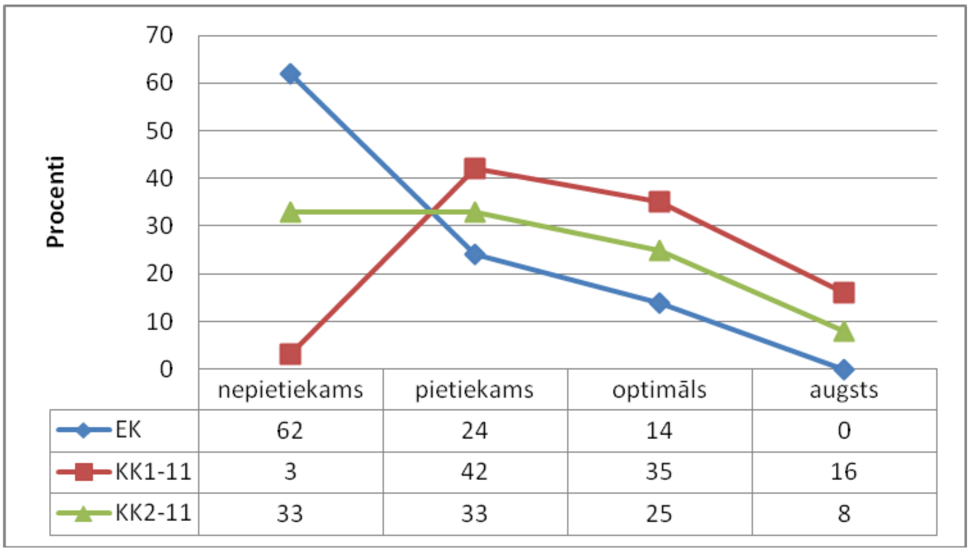
Ja salīdzina EK skolēnu apguves līmeņus abu veidu MM uzdevumu risināšanā, tad nepietiekamais apguves līmenis kustību uzdevumos samazinājās par 19%, pietiekamais līmenis paaugstinājās par 21%, savukārt optimālais un augstākais apguves līmenis palika nemainīgs. Risinot MM uzdevumus, svarīga atpazīstama parauga izmantošana. Sastapšanās un panākšanas procesus skolēni labi izprot pa horizontālu virsmu, bet procesu izpratne pa vertikāli un pa riņķa līniju rada problēmas, skatīt 2. un 3. attēlu.



3. attēls. ***Matemātiskās modelēšanas uzdevumu apguves līmenis EK (n=29)***
Figure 3 ***Level of mastering of mathematical modeling tasks EC (n=29)***

Viens no pētījuma uzdevumiem bija izpētīt, kā 10. un 11. klases skolēni risina MM uzdevumus, izmantojot vienus un tos pašus matemātiskos modeļus, bet izmantojot citas risināšanas metodes. Šiem skolēniem ir dažāds zināšanu līmenis un dažādas pieredzes uzdevumu risināšanā, tas ietekmē skolēnu prasmi ātri un racionāli atrisināt problēmuzdevumus. Visām KK-11 (11. klasēm) matemātisko analīzi māca viens un tas pats skolotājs, bet matemātiku māca citi skolotāji. Visu klašu (EK un KK) skolēni risināja MM uzdevumus, kuru saturs, problēmuzdevumu risināšanas laiks un vērtēšanas kritēriji palika nemainīgi.

KK skolēni īsākā laika posmā izprata problēmas nosacījumus, izveidoja matemātisko modeli, to atrisināja un novērtēja iegūtos rezultātus, jo pielietoja funkcijas atvasinājuma atrašanas algoritmu. MM iespējas paplašinās ar augstākās matemātikas jēdzienu un metožu lietošanu. Rezultāti atspoguļoja vienmērīgu izaugsmes dinamiku optimizācijas problēmuzdevumu risināšanā. Augstāku apguves līmeni sasniedza KK-11 skolēni, skatīt 4. attēlu.

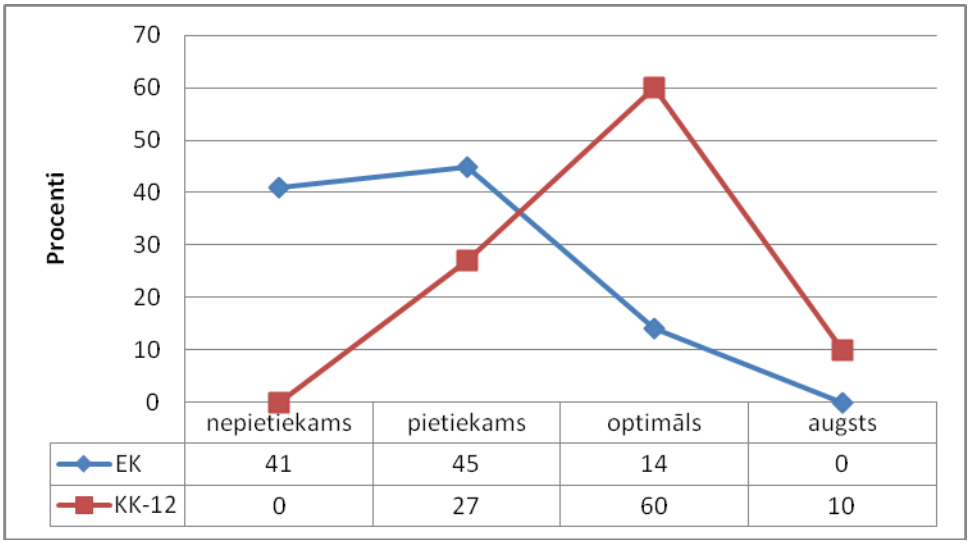


4. attēls. ***EK un KK-11 skolēnu MM prasmju apguves līmenis (optimizācija) (n=85)***
Figure 4 ***EC and CC-11 students' MM skills mastering level (optimization) (n=85)***

Ja EK mācās 10.klases skolēni, kuriem ir atšķirīgs zināšanu līmenis, tad KK-12 mācās 12. klases skolēni, kuri kustību uzdevumus risina pietiekamā, optimālā un augstā līmenī, skatīt 5. attēlu. Vērtēšanas kritēriji abām klašu plūsmām palika nemainīgi. Iegūtie rezultāti KK-12 atspoguļo strauju izaugsmes dinamiku problēmuzdevumu risināšanā tikai līdz optimālajam līmenim, bet augstāka līmeņa dinamika mainījās neievērojami, skatīt 5. attēlu. Arī citi pētnieki uzsver, ka augstāka līmeņa uzdevumus prot risināt tikai 2% no visiem skolēniem (Palamarčuka, 1984).

EK skolēnu zināšanu bāze veidota uz pamatskolā iegūtajām matemātikas zināšanām, bet KK skolēnu zināšanas gan papildinātas, gan nostiprinātas matemātiskās analīzes un fizikas vidusskolas mācību kursā. EK un KK skolēni izmantoja daudzveidīgus MM simbolu veidus: zīmējumus, grafikus un formulas, katrai no tām ir dažāda vizuālā iespēja, taču KK-12 skolēni izmantoja daudzveidīgus simbolu veidus. Formula un zīmējums ir ērti, lai definētu vienu attiecību, savukārt lai sasaistītu vairākas attiecības vienlaikus, labāk ir izmantot shēmu. Tās lietoja KK-12 skolēni.

EK skolēnu zināšanu bāze veidota uz pamatskolā iegūtajām matemātikas zināšanām, bet KK skolēnu zināšanas gan papildinātas, gan nostiprinātas matemātiskās analīzes un fizikas vidusskolas mācību kursā. EK un KK skolēni izmantoja daudzveidīgus MM simbolu veidus: zīmējumus, grafikus un formulas, katrai no tām ir dažāda vizuālā iespēja, taču KK-12 skolēni izmantoja daudzveidīgus simbolu veidus. Formula un zīmējums ir ērti, lai definētu vienu attiecību, savukārt lai sasaistītu vairākas attiecības vienlaikus, labāk ir izmantot shēmu.



5. *attēls*. ***EK un KK-12 skolēnu MM prasmju apguves līmenis (kustība) (n=58)***
Figure 5 ***EC and CC-12 students' MM skills mastering level (n=58)***

Skolēnu atbildes uz aptaujas jautājumu: kādas radās problēmas risinot MM uzdevumus**,** saistās ar matemātiskā modeļa izveidi - 63% KK skolēnu un ar matemātiskā modeļa atrisināšanu- 38% KK skolēnu. KK skolēni atzīmēja, ka piedāvātā problēma tika izprasta, pēc vispārinātu problēmuzdevumu atrisināšanas un zinātnisko atziņu uzrakstīšanas.

No veiktā pētījuma var secināt, ka MM ir būtiska nozīme matemātikas izpratnes, kompetences un domāšanas attīstībā. Ir svarīgi, lai skolēni praktiski pielietotu matemātikā apgūtās problēmu risināšanas prasmes un spriešanas prasmes, lai aktualizētu zināšanas par kopsakarībām lietišķās matemātikas problēmu risināšanā. Pielietot MM uzdevumu risināšanā, var visu līmeņu skolēni, bet skolēni ar augstu matemātiskās kompetences līmeni, ir labākā situācijā, jo prot risināt piedāvātās problēmas daudzveidīgi un radoši. Ir nepieciešams, radīt skolēniem MM mācīšanās vidi reālā situācijā.

Arī pētnieki akcentē MM nozīmi: matemātisko likumsakarību izpratne ar matemātisko modeļu palīdzību nodrošina zinātnisko zināšanu augstu apjēgšanas līmeni (Palamarčuka, 1984), bet visnopietnāko modeļu pētīšanai ir nepieciešami arī visnopietnākie profesionālie līdzekļi - matemātika un datorsimulācija (Podnieks, 2014).

Secinājumi
Conclusions

MM ir viena no matemātikas mācīšanās metodēm. MM tiek raksturota kā reālas problēmas pārveidošanas darbība matemātiskā formā. Matemātisko modeļu veidošana ir svarīga visās ar matemātiku saistītās disciplīnās, kas ir apgūstamas skolā visās vecuma grupās. Skolēnam ir jāapgūst prasme, reālās dzīves problēmu sadalīt vienkāršos uzdevumos, lai veiktu problēmas detalizētu izpēti.

MM mācīšana ietver problēmu risināšanas prasmes un augsta līmeņa domāšanas prasmes pasaules problēmu atspoguļojumā. Matemātiskais modelis ir skolēna domāšanas operāciju rezultāts.

Mācību modelēšanas mērķis ir panākt, lai skolēni attīsta prasmi veidot, analizēt un novērtēt matemātiskos modeļus, kā arī izvirzīt teorētiskās atziņas. EK skolēniem MM problēmuzdevumu risināšana ir pietiekamā līmenī, bet optimālā līmenī- 35% 11.klases skolēnu un 60% 12. klases skolēnu produktīvi risina problēmu uzdevumus uz zināma konteksta, ja uzdevumi tiek sistemātiski atkārtoti. EK skolēniem pietrūkst matemātikas un fizikas satura zināšanu un pieredzes reālās dzīves problēmas pārnest matemātiskas valodā.

Summary

Mathematical modeling is one of the methods of learning mathematics. Mathematical modeling is described as the process of transforming a real problem into a mathematical form. Mathematical modeling is important in all mathematical disciplines and can be learned at school for all age groups.

The student has to acquire the skill to divide the real-life problem into simpler tasks for a more detailed study of the problem.

Mathematical modeling is a purposeful process. The success of the activity depends on the goals the learner wants to achieve. Mathematical modeling is a major area of research in mathematical education that is of particular interest and aims to explore the possibilities and features in which the development and modeling of functional relationships are essential.

The aim of teaching modeling is to enable students to develop the skills to form, analyze and evaluate mathematical models and to advance theoretical knowledge. Experimental grade students solve mathematical modeling problems at a satisfactory level, while in grade 11, 35% of pupils and grade 12, 60% of pupils are optimally solving problem tasks in a known context if the tasks are repeated systematically. Experimental students lack the knowledge and experience of mathematics and physics content to transfer real-life problems to mathematical languages.

Literatūra
References

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). *Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?* Retrieved from https://pdfs.semanticscholar.org/ebc2/4e810efa2f5361b9accfc0097c2bca084b89.pdf

Bonka, D., France, I., Mencis, J., Vilciņš, J., Muceniece, I., Riemere, I., Čakāne, L., & Lāce, G. (2010). *Matemātika skolā*. Rīga: Lielvārds.

Broks, A. (1988). *Sistēmas ap mums un mēs sistēmās*. Rīga: Zvaigzne.

Chengnm, A.K. (2001). *Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools.* Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.870.1449&rep=rep1&type=pdf

Čerāns, K. (2009). *Kas ir matemātisks pierādījums?* Rīga: Latvijas Universitāte.

Dekarts, R. (1978). *Pārruna par metodi*. Rīga: Zvaigzne.

Garyayev, A.V. (2006). *Fizicheskoye, matematicheskoye i kompyuternoye modelirovaniye prirodnykh protsessov i system na urokakh fiziki*. Retrieved from https://www.elibrary.ru/contents.asp?issueid=1276579

Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., & Kiseļova, R. (2013). *Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā 2012 – pirmie rezultāti un secinājumi.* Pieejams https://www.ipi.lu.lv/fileadmin/_migrated/content_uploads/Latvija_SSNP_2012_pirmie_rezultati_un_secinajumi.pdf

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Retrieved from https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-45004-9.pdf

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Retrieved from https://epdf.pub/weeding-and-sowing-preface-to-a-science-of-mathematical-education.html

Mencis, J. (2014). *Matemātikas metodika pamatskolā*. Rīga: Zvaigzne ABC.

Moriyama, J., Suzuki, T., Miyazaki, M., & Sakakibara, Y. (2007). *Integrated Learning of "Modeling" through Mathematics, Science and Technology*. Retrieved from https://www.iteea.org/File.aspx?id=86696&v=4e822661

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish komproject.* Retrieved from http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf

Palamarčuka, V. (1984). *Skola māca domāt*. Rīga: Zvaigzne.

Mārtinsone, K., Pipere, A., & Kamerāde, D. (2016). *Pētniecība: teorija un prakse*. Rīga: RaKa.

Podnieks, K. (2014). *Modelēšanas robežas: ielāpu sega kā vienīgā iespējamā pasaules aina*. Pieejams http://www.ltn.lv/~podnieks/

Reihenova, A. (2018a). Vidusskolēnu domāšanas veidi matemātikas mācīšanās procesā. *Society. Integration. Education. Vol. II,* 405-418.

DOI: http://dx.doi.org/10.17770/sie2018vol1.3427

Reihenova, A. (2018b). Self-motivated Secondary School Student in Learning Mathematics. *The 60st International Scientific Conference of Daugavpils University*. Retrieved from: https://dukonference.lv/files/978-9984-14-864-9_60_konf_kraj_B_Soc%20zin.pdf

Reihenova, A. (2019a). Integrētās mācības matemātikas un dabaszinātņu mācīšanās procesā vidusskolā. *Society. Integration. Education. Vol. II,* 445-459. DOI: http://dx.doi.org/10.17770/sie2019vol2.3929

SKOLA 2030. (2017). *Izglītība mūsdienīgai lietpratībai: mācību satura un pieejas apraksts*. Retrieved from http://www.izm.gov.lv/images/aktualitates/2017/Skola2030Dokuments.pdf

VISC. (2017, 2018, 2019). *Vispārējā izglītība. Pārbaudes darbi*. Pieejams https://visc.gov.lv/vispizglitiba/eksameni/statistika.shtml

Vedins, I. (2008). *Zinātne un patiesība*. Rīga: Avots.

Zeps, D. (2009). *Matemātika un fizika ir viens un tas pats. Ceļā uz tās vienkāršošanos*. Retrieved from https://www.academia.edu/2739782/Matem%C4%81tika_un_fizika_ir_viens_un_tas_pats._Ce%C4%BC%C4%81_uz_t%C4%81s_vienk%C4%81r%C5%A1o%C5%A1anos?auto=download